Note über die Exponentialfunction.

Von dem c. M. **Leopold Gegenbauer.**

Im 30. Bande der Comptes rendus befindet sich ein Referat von Cauchy[1] über eine der Pariser Akademie vorgelegte Arbeit des Herrn Fedor Thoman, in welcher folgender Satz abgeleitet wird:

Hat $\mu(\nu)$ den Werth 0, wenn ν durch ein Quadrat theilbar ist, in allen anderen Fällen aber den Werth $(-1)^{\tilde{\omega}(\nu)}$, wo $\tilde{\omega}(\nu)$ die Anzahl der verschiedenen Primfactoren von ν vorstellt, ist ferner

$$\alpha(\nu) = \mu(\nu)$$

wenn ν nur ungerade Primfactoren enthält, und

$$\alpha(\nu) = 2^{\lambda-1}\mu\left(\frac{\nu}{2^\lambda}\right)$$

wenn $\frac{\nu}{2^\lambda}$ eine ungerade ganze Zahl ist, so bestehen für alle complexen Werthe von x, welche dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind, die Relationen

$$e^x = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1+x^\nu)^{\frac{\alpha(\nu)}{\nu}}$$

$$e^{-x} = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-x^\nu)^{\frac{\mu(\nu)}{\nu}}$$

---

[1] Rapport sur un Mémoire relatif au développement de l'exponentielle e^x en produit continu par M. Fedor Thoman (Commissaires Liouville, Cauchy rapporteur) C. R. Tôme 30 p. 162—163.

In demselben Bande der Comptes rendus theilte bald darauf Cauchy[1] folgende neue Productentwicklung für die Exponentialfunction mit:

Ist

$$\rho(2^{\lambda} p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \ldots p_\tau^{\sigma_\tau}) = \left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right) \quad \left(1-\frac{1}{p_\tau}\right)$$

wo $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ ungerade unter einander verschiedene Primzahlen, $\lambda_1, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\tau$ ganz positive Zahlen sind, von denen nur die erste den Werth 0 haben kann, so besteht für alle complexen Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, die Gleichung

$$e^{\frac{x}{1-x}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} (1+x^{\nu})^{\rho(\nu)}$$

Andere Productentwicklungen für die Exponentialfunction hat später Herr Bugajef in einer im Jahre 1873 in russischer Sprache erschienenen zahlentheoretischen Abhandlung angegeben, von denen in dem ausführlichen Berichte, welcher über diese Arbeit im 10. Bande des Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques von G. Darboux erstattet wird, die folgende enthalten ist:

Ist $\lambda(\nu) = (-1)^{\sigma}$, wo σ die Anzahl der (gleichen oder verschiedenen) Primfactoren von ν vorstellt, so ist für alle complexen Werthe von x, welche dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind:

$$e^{-\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{n^2}}{n^2}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} (1-x^{\nu})^{\frac{\lambda(\nu)}{\nu}}$$

Herr R. Lipschitz[2] hat endlich unlängst die zwei interessanten Relationen

---

[1] Mémoire sur la décomposition des fonctions en facteurs; par M. Augustin Cauchy. C. R. Tome 30 p. 186—190.

[2] Sur une représentation de la fonction exponentielle par un produit infini. C. R. Tome 99 p. 701—703.

$$e^{-\frac{x}{1-x}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\,(1-x^{\nu})^{\frac{\varphi(\nu)}{\nu}}$$

$$e^{\frac{x}{1-x}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\,(1-x^{\nu})^{-\frac{\varphi(\nu)}{\nu}}$$

wo $\varphi(\nu)$ die Anzahl aller ganzen positiven Zahlen vorstellt, welche kleiner als ν und zu ν theilerfremd sind, hervorgehoben, von denen die erste eine Productentwicklung der Exponentialgrösse e^z für alle complexen Werthe von z liefert, deren reeller Bestandtheil zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\infty$ liegt, während die zweite ebenso, wie die Cauchy'sche Formel, eine solche Darstellung von e^z für alle Werthe des Argumentes gibt, deren reeller Bestandtheil sich im Intervalle $-\infty \ldots +\frac{1}{2}$ befindet.

Die angeführten Formeln sind als specielle Fälle in den folgenden Theoremen enthalten.

Bezeichnet $\pi(\nu)$ das Product der mit dem negativen Vorzeichen versehenen verschiedenen Primfactoren von ν, $\tilde{\omega}(\nu)$ die Anzahl dieser Primfactoren, $\varphi_{\varkappa}(\nu)$ für ganzzahlige positive Werthe des Index die Anzahl der Systeme von je $\varkappa$ zu ν theilerfremden ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots \nu$, während diese Function für negative ganzzahlige Werthe des Index durch die Gleichung

$$\varphi_{-\varkappa}(\nu) = \frac{(-1)^{(\varkappa+1)\tilde{\omega}(\nu)}\pi^{\varkappa}(\nu)\varphi_{\varkappa}(\nu)}{\nu^{2\varkappa}}$$

und für $\varkappa = 0$ durch die Relationen

$$\varphi_0(\nu) = 0 \quad (\nu > 1)$$
$$\varphi_0(1) = 1$$

definirt ist, hat ferner $\mu(\nu)$ den Werth 0, wenn ν durch eine Quadratzahl (ausser 1) theilbar ist, und den Werth $(-1)^{\tilde{\omega}(\nu)}$ in allen anderen Fällen, ist endlich

$$\rho_{\varkappa}(\nu) = \frac{(-1)^{(\varkappa+1)\tilde{\omega}(\nu)}\pi^{\varkappa}(\nu)\varphi_{\varkappa}(\nu)}{\nu^{2\varkappa}}$$

wenn ν ungerade ist, und

$$\rho_\varkappa(\nu) = (-1)^{(\varkappa+1)\tilde{\omega}\left(\frac{\nu}{2^\lambda}\right)} \frac{2^{\lambda\varkappa}}{\nu^{2\varkappa}} \pi^\varkappa\left(\frac{\nu}{2^\lambda}\right) \varphi_\varkappa\left(\frac{\nu}{2^\lambda}\right) \left\{1+2^\varkappa \frac{2^{\lambda(\varkappa+1)}-1}{2^{\varkappa+1}-1}\right\}$$

wenn $\frac{\nu}{2^\lambda}$ eine ungerade ganze Zahl ist,

$$\alpha_\varkappa(\nu) = \frac{\mu(\nu)}{\nu^\varkappa} \quad (\varkappa \geqq 0)$$

falls ν zu 2 theilerfremd ist,

$$\alpha_\varkappa(\nu) = \frac{2^{\lambda(\varkappa-1)}}{\nu^\varkappa}\left\{1+\frac{2}{3}(2^{2\lambda}-1)\right\}\mu\left(\frac{\nu}{2^\lambda}\right) \quad (\varkappa > 0)$$

$$\alpha_0(\nu) = 2^{\lambda-1}\mu\left(\frac{\nu}{2^\lambda}\right)$$

wenn die höchste in der geraden Zahl ν enthaltene Potenz von 2 den Exponenten λ besitzt, so bestehen für alle complexen Werthe von x, welche dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind, die Relationen:

$$e^{-\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{n^{\varkappa+1}}} = \prod_1^\infty{}_\nu (1-x^\nu)^{\frac{(-1)^{(\varkappa+1)\tilde{\omega}(\nu)}\pi^\varkappa(\nu)\varphi_\varkappa(\nu)}{\nu^{2\varkappa+1}}} \quad (\varkappa \geqq -1)$$

$$e^{\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{n^{\varkappa+1}}} = \prod_1^\infty{}_\nu (1+x^\nu)^{\frac{\rho_\varkappa(\nu)}{\nu}} \quad (\varkappa \geqq -1)$$

$$e^{-\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{\varphi_\varkappa(n)x^n}{n^{\varkappa+1}}} = \prod_1^\infty{}_\nu (1-x^\nu)^{\frac{\mu(\nu)}{\nu^{\varkappa+1}}} \quad (\varkappa \geqq 0)$$

$$e^{\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{\varphi_\varkappa(n)x^n}{n^{\varkappa+1}}} = \prod_1^\infty{}_\nu (1+x^\nu)^{\frac{\alpha_\varkappa(\nu)}{\nu}} \quad (\varkappa \geqq 0).$$

Hat $\lambda_r(\nu)$ den Werth 0, wenn ν einen Primfactor in einer Potenz enthält, deren Exponent nach dem Modul r einer von 0 oder 1 verschiedenen Zahl congruent ist, in allen anderen Fällen aber den Werth $(-1)^\tau$, wo τ die Anzahl jener Primzahlen ist,

deren Exponent bei der Darstellung von ν durch ein Product von Primzahlpotenzen die Form $\varkappa r+1$ besitzt, $\mu(\nu)$ den Werth 0, wenn ν durch eine Quadratzahl (ausser 1) theilbar ist, sonst aber den Werth $(-1)^{\tilde{\omega}(\nu)}$, wo $\tilde{\omega}(\nu)$ die Anzahl der verschiedenen Primfactoren von ν ist, $\mu_r(\nu)$ für $r>1$ den Werth 0 oder 1, je nachdem ν durch eine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist oder nicht, $\mu_1(\nu)$ den Werth 0 oder 1, je nachdem ν grösser als 1 ist oder nicht, ist ferner

$$\chi_r(\nu)=\lambda_r(\nu)$$

wenn ν ungerade ist, und

$$\chi_r(\nu)=2^{\lambda-1}\lambda_r\left(\frac{\nu}{2^\lambda}\right)$$

wenn $\frac{\nu}{2^\lambda}$ eine ungerade ganze Zahl und entweder λ kleiner als r, oder $\frac{\nu}{2^\lambda}$ keine r^{te} Potenz ist, endlich

$$\chi_r(\nu)=(2^{\lambda-1}+\varkappa)\lambda_r\left(\frac{\nu}{2^\lambda}\right)$$

wenn $\frac{\nu}{2^\lambda}$ die r^{te} Potenz einer ungeraden ganzen Zahl und

$$\varkappa r\leqq\lambda<(\varkappa+1)r$$

ist, so bestehen für alle complexen Werthe von x, welche dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind, die Relationen

$$e^{-\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^{n^r}}{n^r}}=\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-x^\nu)^{\frac{\lambda_r(\nu)}{\nu}}\quad(r\geqq 2)$$

$$e^{\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^{n^r}}{n^r}}=\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+x^\nu)^{\frac{\chi_r(\nu)}{\nu}}\quad(r\geqq 2)$$

$$e^{-\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{\mu_r(n)x^n}{n}}=\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-x^\nu)^{\frac{\mu(\nu)}{\nu^r}}\quad(r\geqq 1).$$